Correction TD - θ1

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Stockage d'eau dans une enceinte ★☆☆ 5118

1) On suppose l'eau entièrement liquide. Puisqu'elle est supposée idéale, son volume est fixe :

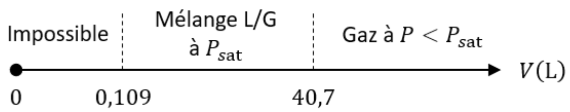
$$\boxed{V = v_L \times m = 0{,}109 \text{ L}}$$

Déterminons maintenant le volume de l'enceinte lorsque toute l'eau est sous forme gazeuse, à la pression P_{sat}.

$$P_{sat}V = \frac{mRT}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{mRT}{MP_{sat}} = 40{,}7 \text{ L}}$$

Si $V > 40{,}7$ L, alors $P < P_{sat}$ donc l'eau est entièrement sous forme gazeuse.

Si $V < 40{,}7$ L, alors on a un mélange L/G à $P = P_{sat}$.



2) On se trouve dans le cas d'un mélange liquide/gaz. L'eau se trouve par définition à la pression P_{sat}. Les volumes massiques valent :

$$v_{\text{L}} = 1{,}09 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \qquad v_{\text{M}} = \frac{V}{m} = 100 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$v_{\text{G}} = \frac{V_{\text{GP}}}{m_{\text{GP}}} = \frac{RT}{P_{sat}M} = 407 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

On utilise le théorème des moments :

$$\boxed{x_{\text{vap}} = \frac{v_{\text{M}} - v_{\text{L}}}{v_{\text{G}} - v_{\text{L}}} = 24{,}4 \text{ \%}}$$

On en déduit la masse de gaz puis son volume :

$$m_{\text{GP}} = x_{\text{vap}} \times m = 24{,}4 \text{ g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{GP}} = m_{\text{GP}} \times v_{\text{G}} = 9{,}92 \text{ L}}$$

On en déduit la masse de liquide puis son volume :

$$m_{\text{L}} = m - m_{\text{GP}} = 75{,}6 \text{ g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{L}} = v_{\text{L}} \times m_{\text{L}} = 0{,}08 \text{ L}}$$

Ex. n°2 • Gaz parfait dans une enceinte ★☆☆ 7134

(1) On applique un PFD à l'équilibre :

$$0 = -P_0S + P_1S - mg$$

Loi d'état des gaz parfaits :

$$P_1V_1 = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad P_1Sh_1 = nRT_0$$

On en déduit :

$$\boxed{h_1 = \frac{nRT_0}{P_1S} = \frac{nRT_0}{P_0S + mg}}$$

(2) La température change, le raisonnement reste identique :

$$\boxed{h_2 = \frac{nRT}{P_0S + mg} > h_1}$$

(3) La température reste identique, mais on ajoute une masse M :

$$\boxed{h_3 = \frac{nRT}{P_0S + mg + Mg} < h_2}$$

(4) La température redevient égale à T_0 :

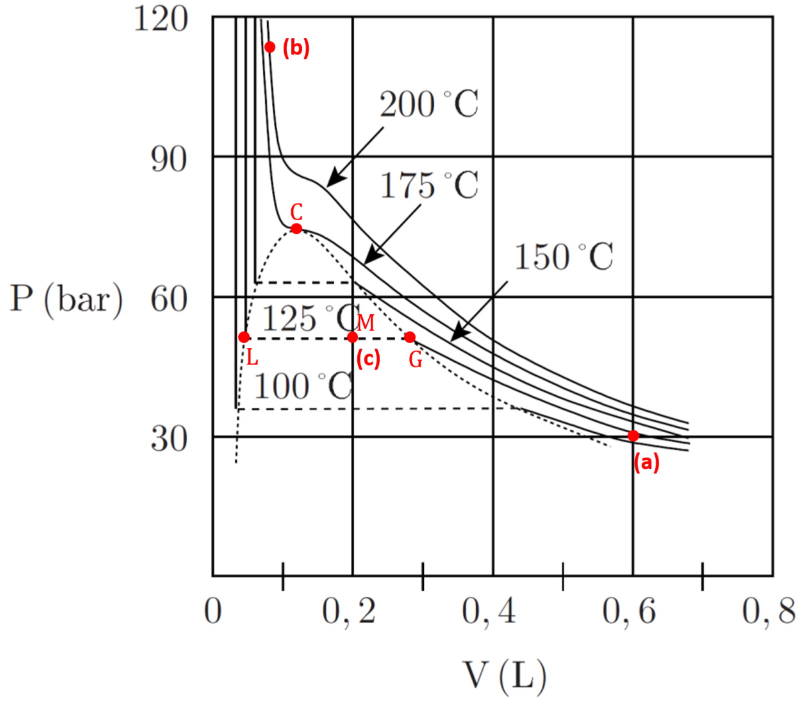
$$\boxed{h_4 = \frac{nRT_0}{P_0S + mg + Mg} < h_3 \quad \text{et} \quad < h_1}$$

Ex. n°3 • Isothermes d'Andrews ★⯪☆ 5604

1) On peut lire graphiquement :

$$\boxed{P_{\text{C}} \simeq 75 \text{ bar} \quad \text{et} \quad V_{\text{C}} = 0{,}12 \text{ L}}$$

2)



(a) État gazeux

(b) État liquide

(c) Mélange L/G. Mesurer à la règle les distances LM et LG et appliquer le théorème des moments.

$$\boxed{x_{\text{vap}} = 0{,}65 \quad \text{et} \quad x_{\text{liq}} = 0{,}35}$$

3) On regarde l'intersection entre la courbe de rosée et la droite horizontale $P = 40$ bar, on lit alors :

$$\boxed{V_m = 0{,}4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Pour aller plus loin

Ex. n°4 • Pression dans des pneus ★☆☆ 5703

On note « h » pour hiver et « e » pour été. L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$\frac{nR}{V} = cte = \frac{P}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_e = \frac{P_h T_e}{T_h} = 3{,}46 \text{ bar}}$$

L'écart de pression est supérieur à 10 %. L'automobiliste doit régler à nouveau la pression des pneus.

Ex. n°5 • Titre massique en vapeur ★☆☆ 8743

1) Calculons la masse d'eau sous forme liquide et sous forme vapeur.

$$\boxed{m_{\text{liq}} = \frac{V_{\text{liq}}}{v_L} = 98 \text{ g}} \qquad \boxed{m_{\text{gaz}} = \frac{V_{\text{gaz}}}{v_G} = 24{,}75 \text{ g}}$$

2) On en déduit le titre massique :

$$\boxed{x_{\text{vap}} = \frac{m_{\text{gaz}}}{m_{\text{gaz}} + m_{\text{liq}}} = 20{,}2 \text{ \%}}$$

3) On a :

$$\boxed{v_{\text{M}} = \frac{V}{m_{\text{tot}}} = 81{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Ou de manière équivalente en utilisant le théorème des moments :

$$x_{\text{vap}} = \frac{v_{\text{M}} - v_{\text{L}}}{v_{\text{G}} - v_{\text{L}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\text{M}} = v_{\text{L}} - x_{\text{vap}} (v_{\text{G}} - v_{\text{L}}) = 81{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Ex. n°6 • Cocotte-minute ★⯪☆ 3336

1) La soupape est soumise à 3 forces : force de pression du gaz à l'intérieur, force de pression du gaz à l'extérieur et poids de la soupape. À l'équilibre mécanique, la somme des forces est nulle. Ainsi,

$$0 = SP_{int} - SP_0 - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{int} = P_0 + \frac{mg}{S} = 1{,}98 \text{ bar}}$$

2) On en déduit :

$$\boxed{T = 100 \cdot \left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right)^{1/4} = 119 \text{ °C}}$$

Cela permet de cuire des aliments à l'eau à des température supérieures à 100 °C.

Ex. n°7 • Oscillations d'un piston 9982

1) Le piston est soumis aux deux forces de pression. Le PFD donne :

$$m\ddot{x} = P_g S - P_d S \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = \frac{nRT_0}{\ell_0 + x} - \frac{nRT_0}{\ell_0 - x}}$$

2) Dans le cas où $\ell_0 \gg x$, on fait le développement limité :

$$\left(1 + \frac{x}{\ell_0}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{x}{\ell_0}$$

Ainsi,

$$m\ddot{x} \simeq \frac{nRT_0}{\ell_0}\left(1 - \frac{x}{\ell_0}\right) - \frac{nRT_0}{\ell_0}\left(1 + \frac{x}{\ell_0}\right) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} \simeq -\frac{2nRT_0}{\ell_0^2}\, x$$

On a donc,

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2nRT_0}{m\ell_0^2}\, x = 0}$$

Ex. n°8 • Pompe isotherme 3786

1) Au n-ième coup de piston, lorsque ce dernier est comprimé au maximum (volume V_{min}), la quantité de matière dans le système {réservoir + volume résiduel de la pompe } vaut :

$$n = \frac{P_n V}{RT} + \frac{P_0 V_{min}}{RT}$$

Au n-ième coup de piston, lorsque ce dernier est étendu au maximum (volume V_{max}), la soupape entre le réservoir et la pompe est ouverte (la pression est la même dans les deux compartiments) et la quantité de matière trouvée précédemment se retrouve distribuée différemment :

$$n = \frac{P_{n+1} V}{RT} + \frac{P_{n+1} V_{max}}{RT}$$

En égalisant les deux expressions, puis en isolant P_{n+1}, il vient :

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{V}{V + V_{max}}\, P_n + \frac{V_{min}}{V + V_{max}}\, P_0}$$

2) Dans la limite où n tend vers l'infini, la pression P_n tend vers une constante :

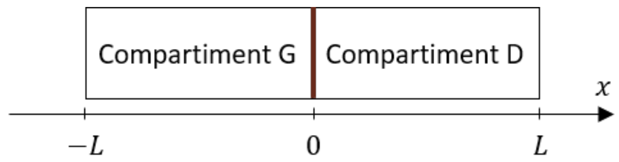
$$P_{lim} = \frac{V}{V + V_{max}} \cdot P_{lim} + \frac{V_{min}}{V + V_{max}}\, P_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{lim} = \frac{V_{min}}{V_{max}}\, P_0}$$

Si $V_{min} \to 0$, alors $P_{lim} \to 0$, on peut vider entièrement le réservoir. Si $V_{min} \ll V_{max}$, alors $P_{min} \ll P_0$: on peut faire un bon vide.

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°9 • Enceinte à deux compartiment 4619

1) Schéma :



Longueur :

$$\boxed{L = \frac{V_0}{S} = 0{,}5 \text{ m}}$$

Quantité de matière :

$$\boxed{n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = 4 \text{ mol}}$$

2) La quantité de matière dans chaque compartiment reste constante. De plus, à l'équilibre mécanique, les pressions des deux compartiments sont égales. Ainsi :

$$\frac{nR}{P} = cte = \frac{V_G}{T_1} = \frac{V_D}{T_0} \quad \text{et} \quad V_G = S\,(L + x) \quad V_D = S\,(L - x)$$

On en déduit :

$$\frac{L + x}{T_1} = \frac{L - x}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = L\,\frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} = 38 \text{ mm}}$$

Ex. n°10 • Stockage d'eau chaude 7769

1) Le volume massique moyen de l'eau dans la cuve vaut $v = V_0/m = 2{,}0{\times}10^{-3}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}}$. À la température T_0, le point représentatif $\mathrm{M_1}$ se trouve dans le domaine de coexistence liquide-gaz. La fraction massique de gaz est donnée par le théorème des moments,

$$x_{vap} = \frac{v - v_L}{v_G - v_L} = 1,3 \cdot 10^{-4}$$

avec par lecture graphique le volume massique du liquide $v_\mathrm{L} = 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$ et celui du gaz $v_\mathrm{G} = 8{,}0\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}}$. On en déduit les masses respectives de gaz et de liquide,

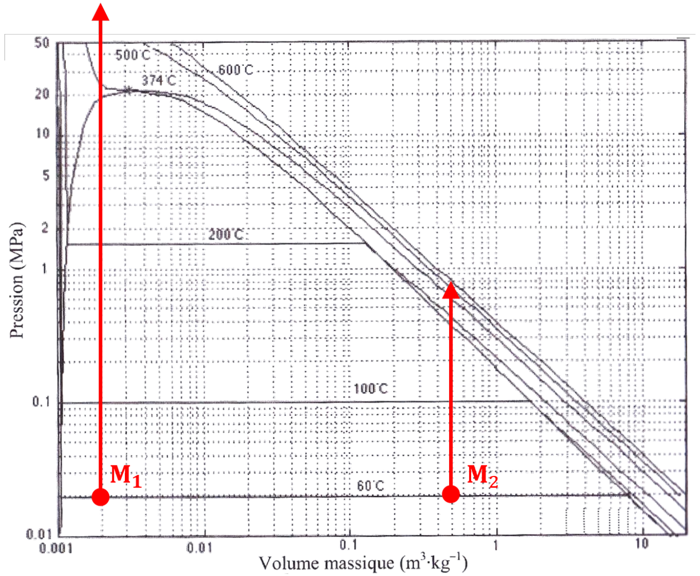
$$\boxed{m_\mathrm{G} = x_\mathrm{vap} \times m = 13\ \mathrm{g}} \quad \text{et} \quad \boxed{m_\mathrm{L} = m - m_\mathrm{G} \simeq m}$$

L'eau est presque exclusivement sous forme liquide à cette température.

2) Comme la cuve est indéformable, son volume est constant et donc le volume massique moyen de l'eau dans la cuve est constant aussi. Le point représentatif du système dans le diagramme de Clapeyron est donc à la verticale de $\mathrm{M_1}$ dans le domaine liquide. En utilisant l'équation d'état donnée pour $V = V_0$, on trouve :

$$\boxed{P = P_0 + \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) = 2{,}1 \times 10^3\ \mathrm{bar}}$$

Cette pression est énorme, la cuve ne pourrait pas y résister et exploserait.



3) On raisonne de même avec un volume massique moyen $v = \dfrac{V_0}{m} = 0{,}5\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$. Le point représentatif du système est le point à la verticale de $\mathrm{M_2}$ placé sur le diagramme, le système est alors exclusivement gazeux. On peut lire une pression P_0 de l'ordre de 7 bar, ce qui est beaucoup plus raisonnable et ne doit pas poser de problème de résistance de la cuve.